

Олимпиада школьников «Ломоносов»

Заключительный этап 2025/26 учебного года по математике

9 классы

Задача 1. В круге радиуса 5 три разных хорды пересекаются в одной точке, причем две из них делятся этой точкой пополам. Какова при этом наименьшая возможная длина третьей хорды?

Ответ: 10

Решение. Точка пересечения — это центр круга, иначе радиус проведенный через эту точку, был бы перпендикулярен к тем двум хордам, а значит, они совпали бы.

Если соединить центр с точкой пересечения, то полученный отрезок будет перпендикулярен обеим хордам (т.к. в равнобедренном треугольнике медиана совпадает с высотой), которые делятся пополам. Значит в этом случае хорды совпали бы — налицо противоречие.

Задача 2. Найдите все четырёхзначные натуральные числа n , обладающие свойством, что первые несколько цифр числа n^2 образуют число n . Если таких чисел несколько, в ответ запишите наименьшее из них, если таких чисел нет, в ответ запишите 0.

Ответ: 1000

Решение. Решим задачу в общем виде: будем искать k -значные числа n . Тогда $10^{k-1} \leq n < 10^k$. Для числа n^2 справедливы неравенства $10^{2k-2} \leq n^2 < 10^{2k}$, то есть n^2 — это $(2k-1)$, или $2k$ -значное число.

Допустим, что n^2 это $2k$ -значное число. Тогда $n^2 \geq n \cdot 10^k$ (мы дописали к k -значному n ещё k чисел. Самый минимальный по значению вариант — приписать k нулей, что значит просто домножить на 10^k). Но тогда получается, что $n \geq 10^k$, это противоречие с тем, что в n всего k цифр.

Значит, n^2 есть $(2k-1)$ -значное число.

Согласно условию выполнено равенство $n^2 = n \cdot 10^{k-1} + m$, где m — $(k-1)$ -значное число. Перепишем последнее равенство в виде $n(n - 10^{k-1}) = m$. Рассмотрим случаи:

1) если $n - 10^{k-1} > 0$, то в последнем равенстве слева стоит по крайней мере k -значное число, а справа — $(k-1)$ -значное, что невозможно;

2) следовательно $n - 10^{k-1} = 0$, т.е. $n = 10^{k-1}$.

Для четырёхзначных чисел ответ: $n = 1000$.

Задача 3. Пусть F — множество точек на плоскости, координаты которых являются натуральными числами, не превосходящими 10. Найдите количество прямоугольных треугольников, вершины которых принадлежат F , а каждый из катетов параллелен одной из координатных осей.

Ответ: 8100

Решение. Найдём количество прямоугольников, координаты вершин которых — натуральные числа, удовлетворяющие условиям $x \in [1, 10]$, $y \in [1, 10]$, а стороны параллельны осям x, y . Нам нужно выбрать две вертикальные прямые из 10 и две горизонтальные прямые из 10. Таким образом, всего получится

$$C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 = \left(\frac{10 \cdot 9}{2} \right)^2 = 45^2 = 2025 \quad \text{прямоугольников.}$$

Каждый прямоугольник порождает 4 прямоугольных треугольника, удовлетворяющих условиям задачи. (Важно, что ни один из этих четырёх треугольников не может быть порожден другим прямоугольником.) Таким образом, количество прямоугольных треугольников равно $2025 \cdot 4 = 8100$.

Задача 4. В неравнобедренном треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна биссектрисе BL . Найдите все возможные значения периметра треугольника ABC , если длина стороны AB равна 7, а длины двух других сторон выражаются целыми числами.

Ответ: целые числа от 29 до 34 и от 36 до 41 включительно

Решение. В ABM биссектриса угла B по условию перпендикулярна стороне AM , то есть является одновременно биссектрисой и высотой. Значит, этот треугольник равнобедренный, $AB = BM = 7$. Тем самым известны две стороны $\triangle ABC$: $AB = 7, BC = 14$. Третья сторона AC может принимать произвольные целые значения, но при этом ABC должен: а) существовать; б) быть неравнобедренным. Значит, должны выполняться неравенства: $AC \neq 7, AC \neq 14, BC - AB < AC < AB + BC$. Отсюда $7 < AC < 21, AC \neq 14$. Возможные целые значения AC : 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Соответственно возможные значения периметра треугольника: целые числа от 29 до 34 и от 36 до 41 включительно.

Задача 5. Агриппина гоняет в школу на самокате, по тротуару — но на её пути есть два пешеходных перехода со светофорами. От дома до первого перехода расстояние 50 метров, ширина первого перехода равна 30 метров, потом до следующего перехода ей надо ехать 120 метров, второй переход шириной 10 метров — а там уже и школа.

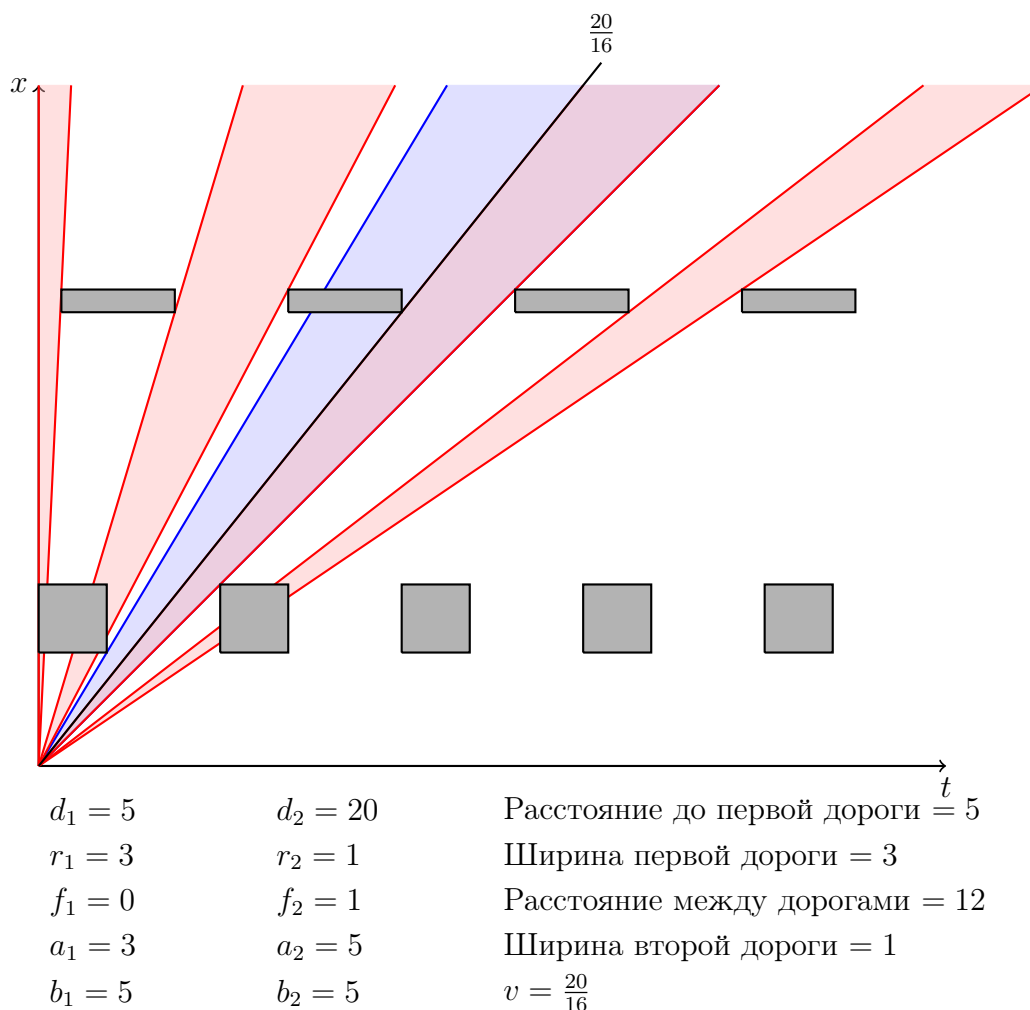
Светофоры работают так: на первом переходе машинам даётся 30 секунд, пешеходам — 50 секунд, на втором переходе машинам даётся 50 секунд, пешеходам — 50 секунд, а ещё известно, что ровно в момент выхода из дома первый светофор загорается красным (для пешеходов), а через 10 секунд загорится красным светофор на втором переходе.

Агриппина может гнать сколь угодно быстро, и намерена попасть в школу как можно скорее, но ускорения она не любит — девочка выезжает из дому с постоянной скоростью, которую и будет поддерживать на протяжении всего пути, не считаясь с правилами дорожного движения.

С какой наибольшей скоростью она сможет доехать до школы так, чтобы ей ни разу не пришлось проехать на красный, и чтобы светофор не переключился на красный, пока она ещё на зебре?

Ответ: $\frac{5}{4}$ м/с

Решение.



Изобразим происходящее графически (конечно, это не единственный способ решения). Отложим по оси t время, по оси x пройденное расстояние от дома до школы. Полосками прямоугольников обозначим переходы, где серый прямоугольник значит, что соответствующий светофор горит красным. Высота прямоугольника (r_i) соответствует ширине перехода, а ширина (a_i) — времени, отведённому автомобилям. Горизонтальное расстояние между прямоугольниками (b_i) — это время для пешеходов. Из условия задачи также понятно, как прямоугольники первого перехода сдвинуты относительно второго и относительно оси (параметры f_i). Величины d_i показывают расстояния от дома до нужного перехода. Расстояния и время на иллюстрациях уменьшены в 10 раз, так что итоговая скорость будет такой же.

В такой системе координат поездку Агриппины изобразит прямая, выходящая из $(0, 0)$. Эта прямая не может пересекать как нижние стороны прямоугольников (это бы значило, что Агриппина подъехала к переходу, пока горит красный), так и левые (это бы значило, что зелёный погас, пока она ещё на дороге). Чем круче направлена линия — тем выше скорость. Соответственно, нужно выбрать линию с самым крутым уклоном, которая бы не пересекала прямоугольников.

Синим обозначены скорости, подходящие для преодоления только первого перехода, красным — те скорости, с которыми она бы смогла преодолеть по правилам второй. Соответственно, подходящие нам скорости будут лежать в пересечении синей и красной областей.

Задача 6. При каких значениях параметра a множество решений неравенства

$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0$$

(относительно неизвестной x) представляет собой отрезок длиной 2026?

Ответ: при $a = -1519,5$.

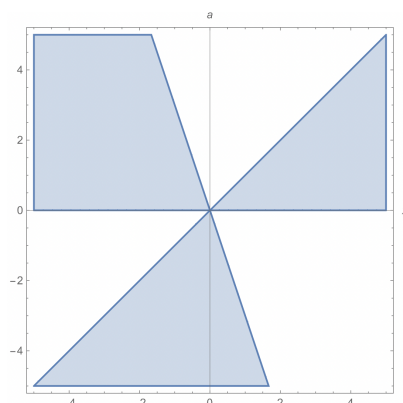
Решение. Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \iff \frac{a^2 + 2xa - 3x^2}{a^3} \leq 0 \iff \frac{(a-x)(a+3x)}{a^3} \leq 0 \iff \frac{3(x-a)\left(x+\frac{a}{3}\right)}{a^3} \geq 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{cases} a > 0, \\ (x-a)\left(x+\frac{a}{3}\right) \geq 0, \\ a < 0, \\ (x-a)\left(x+\frac{a}{3}\right) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} a > 0, \\ \begin{cases} x \geq a, \\ x \leq -\frac{a}{3}, \end{cases} \\ a < 0, \\ \begin{cases} x \geq a, \\ x \leq -\frac{a}{3} \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} a > 0, \\ \begin{cases} a \leq x, \\ a \leq -3x, \end{cases} \\ a < 0, \\ \begin{cases} a \leq x, \\ a \leq -3x. \end{cases} \end{cases}$$

Изобразим множество решений последней совокупности в осях (x, a) :

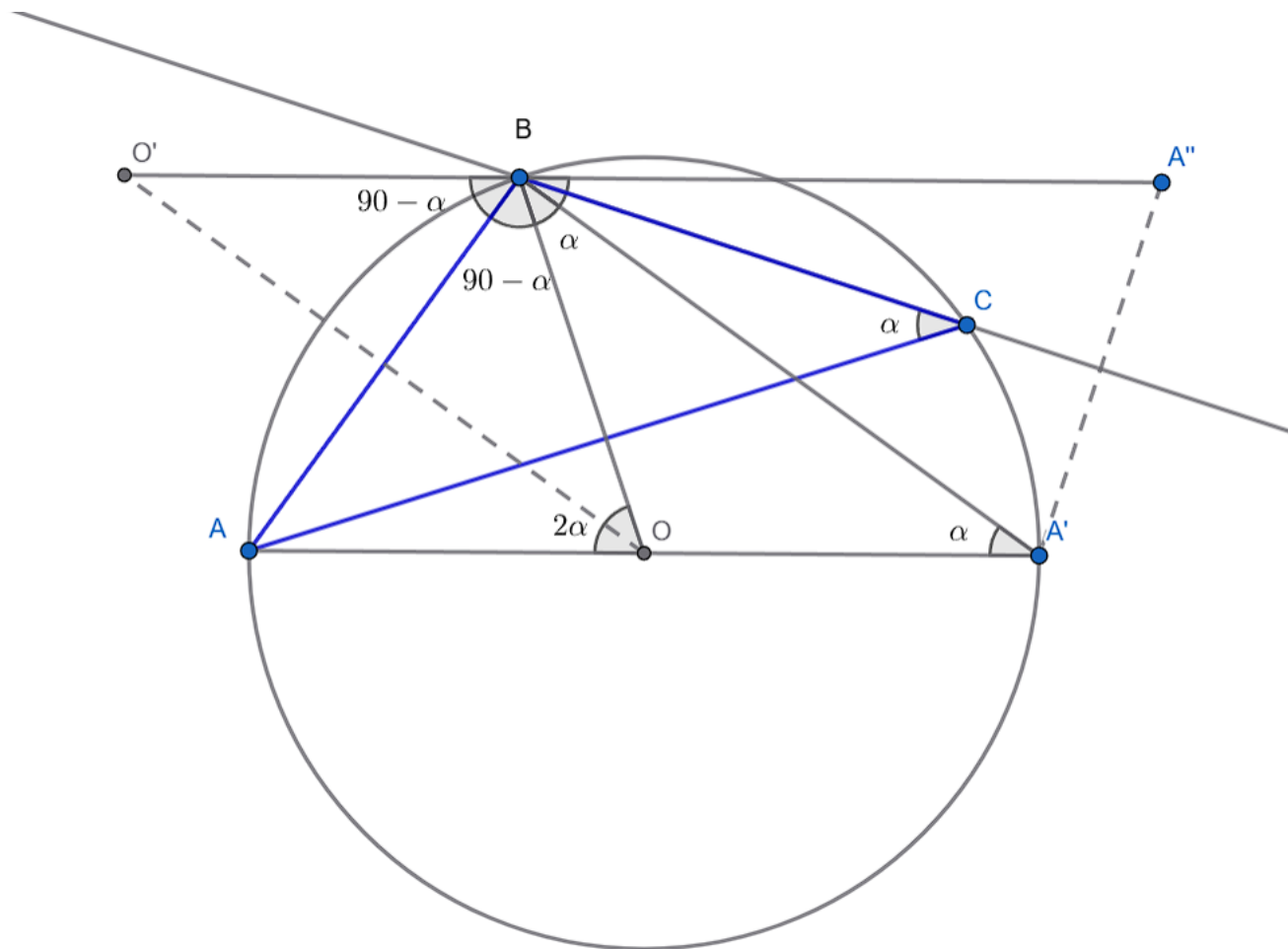


Множество решений исходного неравенства относительно x при фиксированном $a = a_0$ есть проекция на ось x пересечения изображённой на рисунке области с прямой $a = a_0$. Ясно, что при $a > 0$ это множество будет состоять из двух лучей, $a = 0$ не входит в область допустимых значений для a в исходном неравенстве, а при $a < 0$ множеством решений будет отрезок с концами a и $-a/3$. Длина этого отрезка равна $-4a/3 = 2026$, откуда $a = -1519,5$.

Задача 7. Дан треугольник ABC , вписанный в окружность с центром в точке O . Угол $\angle C = 30^\circ$. Центр окружности симметрично отразили относительно прямой, содержащей сторону AB — получилась точка O' . Точку, диаметрально противоположную точке A , симметрично отразили относительно прямой, содержащей сторону BC . Получилась точка A'' . Оказалось, что точки O', B, A'' лежат на одной прямой. Найдите угол $\angle B$.

Ответ: 105°

Решение.



Рассмотрим треугольник ABC . Пусть $\angle BCA = \alpha$. Тогда $\angle BA'A = \alpha$, так как он опирается на ту же дугу. Также заметим, что $\angle AOB = 2\alpha$. Поскольку точка O' симметрична точке O относительно прямой AB , то $AB \perp OO'$, значит $\angle O'BA = \angle ABO = 90^\circ - \alpha$.

Поскольку $|OB| = |OA'| = R$, треугольник $A'OB$ равнобедренный, и $\angle OBA' = \angle BA'O = \alpha$.

Так как по условию O', B, A'' лежат на одной прямой, то $\angle A''BA' = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha + \alpha) = \alpha$. При этом, поскольку точки A', A'' симметричны относительно прямой BC , то $\angle A'BC = \angle A''BC = \frac{\alpha}{2}$.

Тогда $\angle ABC = 90^\circ - \alpha + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

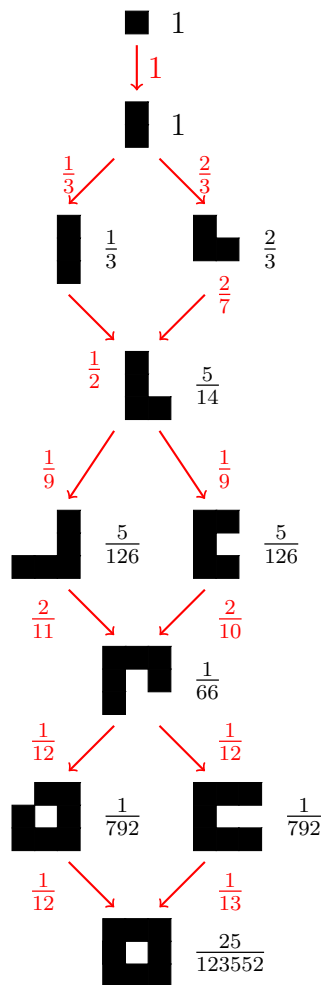
Задача 8. Робот Казимир решил создать шедевр. На неограниченном клетчатом поле он закрашивает клетку чёрным, а потом поочерёдно красит ещё 8 квадратиков, каждый раз выбирая клетку под покраску наугад из соседних к уже закрашенным (соседство по диагонали не подходит, нужна как минимум одна общая сторона).

С какой вероятностью своим последним штрихом он превратит «кольцо» в чёрный квадрат (размерами 3 на 3)?



Ответ: $\frac{25}{1606176}$

Решение. Изобразим все возможные промежуточные раскраски, которые не ведут к заведомой неудаче, совмещая вместе те случаи, которые можно перевести друг в друга сдвигом, отражением или поворотом. Цветными стрелками будем отмечать возможность перейти от одного рисунка к другому с вероятностями таких переходов (для подсчёта которых достаточно перебрать возможных новых соседей), а справа от рисунков чёрным цветом напомним суммарную вероятность оказаться на соответствующем шагу в такой конфигурации. Сначала нам нужно получить «кольцо», что сильно ограничивает возможные варианты:



Ну а на последнем шаге вероятность попасть в центр равна $\frac{1}{13}$, поэтому ответ равен

$$\frac{25}{123552} \cdot \frac{1}{13} = \frac{25}{1606176}.$$